Dossier n°79 : Exemples de calcul de valeurs approchées d'intégrales.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 19 décembre 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Le calcul intégral est introduit dans les classes de Terminales S et ES.

Dans les deux cas, cette notion est introduite comme une notion d'aire puis par le calcul de primitives.

Je choisis donc de situer ce dossier au niveau de la Terminale S pour disposer d'un maximum d'outils. Ce sujet y est généralement présenté sous forme d'un TP.

II Commentaires généraux.

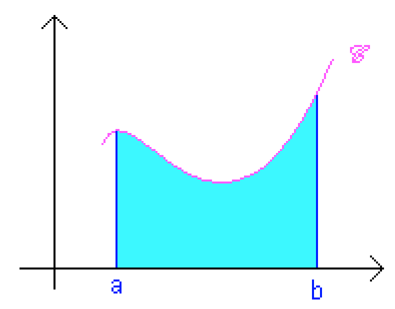
Comme je l'ai expliqué précédemment, on définit désormais l'intégrale d'une fonction comme une notion d'aire par la définition suivante :

Définition :

Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle [a ;b] et C sa courbe représentative.

L'aire sous la courbe C sur l'intervalle [a ;b] est l'aire du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations x = a et x =b.

On note $\int_a^b f(x)dx$ cette aire et on lit **intégrale (ou somme) de a à b de f**.



On introduit ensuite la notion de primitive et on fait le lien avec l'intégration par le théorème suivant :

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur I.

Les élèves savent donc calculer les intégrales de fonctions dont ils savent déterminer des primitives.

Il reste toutefois des cas où les élèves ne peuvent pas déterminer de primitive de la fonction à intégrer (cas où la primitive est une fonction hors programme par exemple).

L'objet de ce dossier est donc de présenter des méthodes de calcul approché d'intégrales de fonctions dont on ne connaît pas de primitive.

J'ai choisi de vous présenter le cas de la fonction $x \to \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle [0 ;1] dont une primitive est la fonction arctan, inconnue des élèves.

Je vous propose trois méthodes d'approximation de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Pour chacune de ces méthodes, on divise l'intervalle sur lequel on intègre en n intervalles de même longueur de façon à écrire :

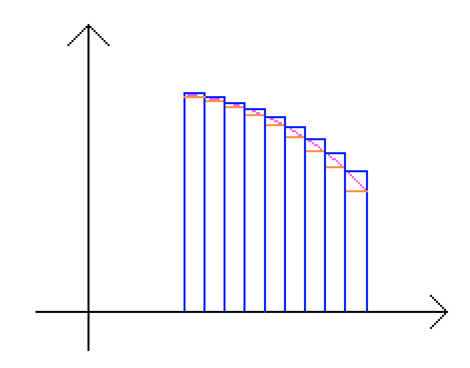
$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} I_k$ où $f : x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$.

Méthodes des rectangles :

Elle est souvent présentée aux élèves pour introduire la notion d'intégrale.

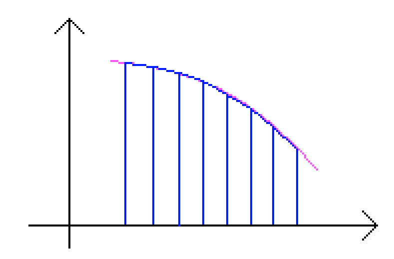
Elle consiste à remplacer chaque I_k par l'aire du rectangle construit sur les points de coordonnées :

- pour la méthode des rectangles à gauche : $\left(\frac{k}{n};0\right)$, $\left(\frac{k+1}{n};0\right)$, $\left(\frac{k}{n};f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et $\left(\frac{k+1}{n};f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$;
- pour la méthode des rectangles à droite : $\left(\frac{k}{n};0\right)$, $\left(\frac{k+1}{n};0\right)$, $\left(\frac{k}{n};f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$ et $\left(\frac{k+1}{n};f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$.



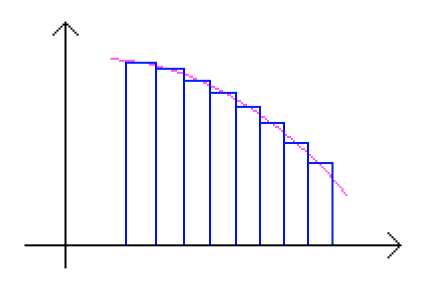
Méthode des trapèzes :

On remplace cette fois-ci chaque I_k par l'aire du trapèze construit sur les points de coordonnées $\left(\frac{k}{n};0\right)$, $\left(\frac{k+1}{n};0\right)$, $\left(\frac{k}{n};f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et $\left(\frac{k+1}{n};f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$.



Méthode du point médian

On remplace de nouveau chaque I_k par l'aire d'un rectangle mais cette fois-ci construit sur les points de coordonnées $\left(\frac{k}{n};0\right)$, $\left(\frac{k+1}{n};0\right)$, $\left(\frac{k}{n};f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right)$ et $\left(\frac{k+1}{n};f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right)$



Les trois méthodes sont traitées de manière analogue :

- représentation graphique pour n = 4 ;
- écriture du réel u_n qui approche I en fonction de n ;
- étude de la suite ainsi construite ; en particulier, elle converger vers I ;
- détermination d'un entier n_p tel que $\forall\ n \geq n_p \mid I - u_n \mid \leq 10^{-3}$;
- valeur approchée de I obtenue.

III Présentation de l'exercice.

But : Approcher à 10^{-3} près I = $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ par trois méthodes.

III.1 Préliminaires

On étudie la fonction f : x → $\frac{1}{1+x^2}$ et on trace sa courbe représentative afin de montrer l'existence et l'interprétation graphique de I.

Par la suite (comme annoncé précédemment), on fixe n ∈ IN* et on divise l'intervalle [0 ;1] en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$: $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ où k ∈ [0 ;n-1].

Pour tout k ∈ [0 ;n-1], on note $I_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx$ de sorte que $I = \sum_{k=0}^{n-1} I_k$.

III.2 Méthode des rectangles.

En remarquant que sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$, la fonction f est approchée par $f\left(\frac{k}{n}\right)$ ou $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$, on montre que I est approché par :

- pour la méthode des rectangles à gauche :

$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$;

- pour la méthode des rectangles à gauche :

$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$;

On déduit de l'inégalité $s_n \leq I \leq S_n$ que $(s_n)_n$ et $(S_n)_n$ convergent vers I.

Finalement, $\mid I - s_n \mid \leq \frac{1}{2n}$.

Pour n_1 = 500, on obtient une valeur approchée à 10^{-3} près de I (par défaut) :
$s_{500} \approx 0,784897996731$

Remarque :

En réalité, $|I - s_n| \leq \frac{M'}{2n}$ où M' majore $|f'|$ sur [0 ;1].

Outils :

- *Inégalité de la moyenne :*

Si f est une fonction continue sur [a ;b] (a ≤ b) et si, pour tout x ∈ [a ;b], m ≤ f(x) ≤ M alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

- *Relation de Chasles :*

Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors pour tous a, b, c ∈ I tels que a < c < b :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

III.3 Méthode des trapèzes.

En remarquant que sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$, f est approchée par une fonction affine, on montre que I est approché par :

$$T_n = \frac{1}{n}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

On déduit de l'égalité $T_n = \frac{s_n + S_n}{2}$ que $(T_n)_n$ converge vers I.

Finalement, $|I - T_n| \leq \frac{M}{12n^2}$ où M majore $|f''|$ sur [0 ;1].

Pour n_2 = 13, on obtient une valeur approchée à 10^{-3} près de I :
$T_{13} \approx 0,785151615177$

III.4 Méthode du point médian.

En remarquant que sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$, f est approchée par f(k') où k' = $\frac{\frac{k}{n}+\frac{k+1}{n}}{2} = \frac{2k+1}{2n}$, on montre que i est approché par :

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right).$$

On déduit de l'inégalité $s_n \leq R_n \leq S_n$ que $(R_n)_n$ converge vers I.

Finalement, $|I - R_n| \leq \frac{M}{24n^2}$.

Pour n_3 = 10, on obtient une valeur approchée à 10^{-3} près de I :
$R_{10} \approx 0,78560649625$

Outil : Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(x_n)_n$ trois suites telles que ∀ n ∈ IN, $u_n \leq x_n \leq v_n$. Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la limite l alors $(x_n)_n$ converge vers l.

III.5 Conclusion.

La méthode du point médian est plus rapide que celle des trapèzes qui est plus rapide que la méthode des rectangles.

Soit α la valeur approchée obtenue par la méthode la plus rapide.

$\alpha = 0{,}785$

$4\alpha = 3{,}14$

On peut conjecturer que I = $\frac{\pi}{4}$.

<u>*Commentaire :*</u>

Il faut rajouter l'algorithme de calcul de T_n ou de R_n à la calculatrice.

IV Enoncé de l'exercice.

Le but de cet exercice est de calculer une valeur approchée de l'intégrale I = $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

IV.1 Préliminaires.

Soit f la fonction définie sur IR par, pour tout x ∈ IR, f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$.

1. Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
2. Prouver l'existence de l'intégrale de f sur [0 ;1].
3. Rappeler l'interprétation graphique de I.

Soit n ∈ IN*. Dans la suite du problème, on divise l'intervalle [0 ;1] en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$: $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ avec k ∈ {0 ;… ;n-1}.

Pour tout k ∈ {0 ;… ;n-1}, on note I_k l'intégrale de f sur $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$:

$$I_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx$$

IV.2 Méthode des rectangles.

Pour tout k, on remplace I_k par l'aire d'une des deux rectangles construits sur les points de coordonnées :

- $\left(\frac{k}{n};0\right)$, $\left(\frac{k+1}{n};0\right)$, $\left(\frac{k}{n};f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et $\left(\frac{k+1}{n};f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

ou • $\left(\frac{k}{n};0\right)$, $\left(\frac{k+1}{n};0\right)$, $\left(\frac{k}{n};f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$ et $\left(\frac{k+1}{n};f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$.

1. Représenter les rectangles obtenus pour n = 4.
2. Montrer que cette méthode revient à approcher I par l'un des deux nombres s_n = $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ ou S_n = $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
3. Montrer que $s_n \le I \le S_n$. En déduire que les suites $(s_n)_n$ et $(S_n)_n$ convergent vers I.
4. Montrer que $S_n - s_n = \frac{1}{2n}$. En déduire que $|I - s_n| \le \frac{1}{2n}$.
5. Déterminer un entier n_1 tel que pour tout $n \ge n_1$, $|I - s_n| \le 10^{-3}$. en déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de I.

IV.3 Méthode des trapèzes.

Pour tout k, on remplace I_k par l'aire du trapèze construit sur les points de coordonnées $\left(\frac{k}{n};0\right)$, $\left(\frac{k+1}{n};0\right)$, $\left(\frac{k}{n};f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et $\left(\frac{k+1}{n};f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$.

1. Représenter les trapèzes obtenus pour n = 4.

2. Montrer que cette méthode revient à approcher I par le réel : $T_n = \frac{1}{n}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$

3. Montrer que $T_n = \frac{s_n + S_n}{2}$. En déduire que $(T_n)_n$ converge vers I.

4. En admettant que $|I - T_n| \leq \frac{M}{12n^2}$ où M majore $|f''|$ sur [0 ;1], déterminer un entier n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, $|I - T_n| \leq 10^{-3}$. en déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de I.

IV.4 Méthode du point médian.

Pour tout k, on remplace I_k par l'aire du rectangle construit sur les points de coordonnées $\left(\frac{k}{n};0\right)$, $\left(\frac{k+1}{n};0\right)$, $\left(\frac{k}{n};f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right)$ et $\left(\frac{k+1}{n};f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right)$.

1. Représenter les rectangles obtenus pour n = 4.
2. Montrer que cette méthode revient à approcher I par le réel : $R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$.
3. Montrer que $s_n \leq R_n \leq S_n$. En déduire que $(R_n)_n$ converge vers I.
4. En admettant que $|I - R_n| \leq \frac{M}{24n^2}$, déterminer un entier n_3 tel que pour tout $n \geq n_3$, $|I - T_n| \leq 10^{-3}$. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de I.

IV.5 Conclusion.

1. Comparer la vitesse de convergence des trois méthodes pour l'approximation demandée.
2. Soit α la valeur approchée obtenue par la méthode la plus rapide. Calculer 4α. Quelle valeur semble avoir 4I ? Conjecturer la valeur exacte de I.